romain.maths

COURS · PREMIÈRE · SPÉ MATHS

01 CHAPITRE

Fonctions polynômes & équations du second degré

Forme canonique, discriminant, résolution et signe du trinôme du second degré.

AU PROGRAMME

I. Fonctions polynômes de degré 2

II. Résolution de l'équation ax2+bx+c=0 (a différent de 0)

III. Signe du trinôme du second degré

IV. Propriétés supplémentaires

COURS · PREMIÈRE · SPÉ MATHS

01 Fonctions polynômes & équations du second degré

I. FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

A. Généralités

DÉFINITION

Une **fonction polynôme de degré 2**, appelée aussi **trinôme**, est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a, b et c sont des nombres réels appelés **coefficients** du trinôme, avec $a \neq 0$ (sinon f est une fonction affine ou linéaire).

EXEMPLE

i) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

ii) $g(x) = 2x + 5$ n'est pas une fonction polynôme de degré 2 mais de degré 1, car $a = 0$.

THÉORÈME

Toute fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Cette forme est la **forme canonique** de la fonction f.

› DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x\right] + c \\ &= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Nous avons bien $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

DÉFINITION

On appelle **discriminant** du trinôme le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

REMARQUE

La forme canonique d'un trinôme peut s'écrire : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

B. Sens de variation d'un trinôme

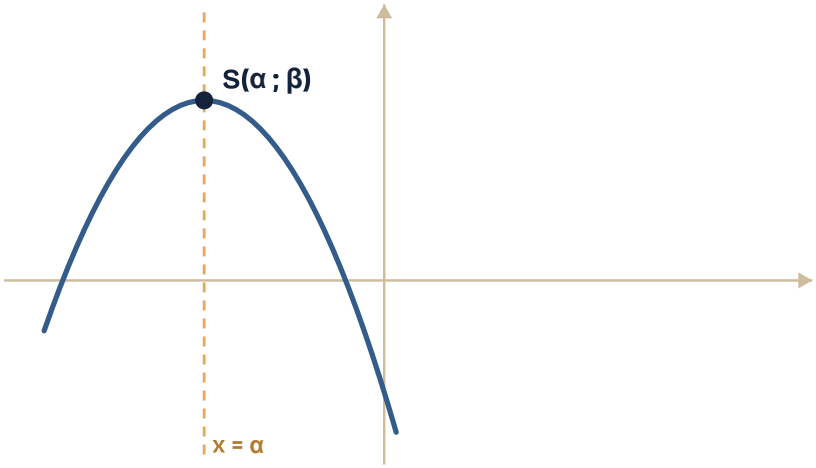
1. Sommet et coordonnées

PROPRIÉTÉ

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

i) La courbe représentative de f est une **parabole** de sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$. Les coordonnées du sommet s'écrivent $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ ou $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

ii) Une parabole possède un **axe de symétrie** d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$, c'est-à-dire $x = \alpha$.



CAS A > 0 — SOMMET S, AXE DE SYMÉTRIE X = A

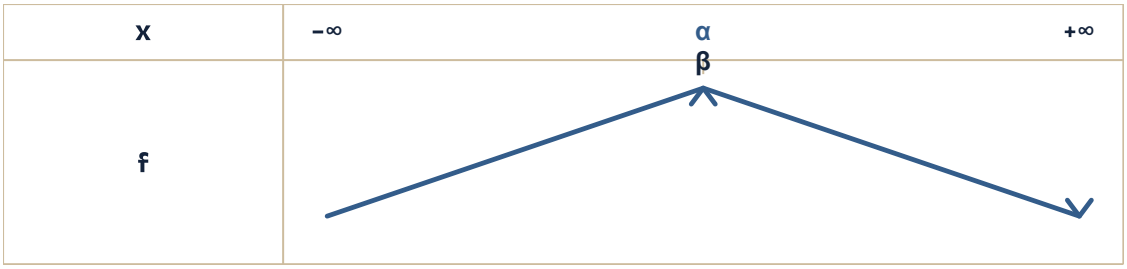
2. Courbes et tableaux de variation

1er cas : $a > 0$. La fonction est décroissante puis croissante.

x	−∞	α	+∞
f		↘ β ↗	

A > 0 : MINIMUM B ATTEINT EN A

2e cas : $a < 0$. La fonction est croissante puis décroissante.



A < 0 : MAXIMUM B ATTEINT EN A

II. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $AX^2 + BX + C = 0$ (A DIFFÉRENT DE 0)

L'objectif est de résoudre des équations du type $ax^2 + bx + c = 0$. D'après la partie précédente :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Comme $a \neq 0$, il suffit de résoudre $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$.

A. Cas n°1 : Δ est négatif ($\Delta < 0$)

1. Solution de l'équation

THÉORÈME

Lorsque le discriminant du trinôme est négatif, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **n'admet aucune solution réelle**.

DÉMONSTRATION

On a $4a^2 > 0$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, d'où $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.

L'équation $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ n'a donc aucune solution.

EXEMPLE

$x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$, donc cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

2. Factorisation

THÉORÈME

Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle : il **n'est pas factorisable** sur $\mathbb{R}$.

B. Cas n°2 : Δ est nul ($\Delta = 0$)

1. Solution de l'équation

THÉORÈME

Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une **unique solution**, appelée **racine double** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

› DÉMONSTRATION

On a $-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$, on résout donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$, d'où $x=-\dfrac{b}{2a}$: il y a une seule solution.

EXEMPLE

$x^2+2x+1=0$: $\Delta=0$, l'équation admet une unique solution $x_0=-1$.

2. Factorisation

THÉORÈME

Si $\Delta=0$, pour tout réel x : $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.

› DÉMONSTRATION

D'après la forme canonique, $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$. Si $\Delta=0$, il reste $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, qui est la forme factorisée.

C. Cas n°3 : Δ est positif ($\Delta>0$)

1. Solution de l'équation

THÉORÈME

Si $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet **deux solutions** x_1 et x_2, appelées **racines** du trinôme :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

› DÉMONSTRATION

$4a^2>0$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$, on peut alors factoriser :

$$\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$
$$\iff \left[x+\tfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\tfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul, d'où $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

EXEMPLE

Résoudre $-2x^2+x+4=0$. $\Delta=b^2-4ac=1+32=33>0$: il existe deux racines.

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{33}}{-4}=\frac{1+\sqrt{33}}{4} \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{33}}{-4}=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$$

2. Factorisation

THÉORÈME

Si $\Delta>0$, le trinôme a deux racines x_1 et x_2. Pour tout réel x : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

D. Bilan

Selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Δ	$\Delta < 0$		$\Delta = 0$		$\Delta > 0$
Racines		**aucune**		$x_0 = -\frac{b}{2a}$	
Factorisation		**impossible sur $\mathbb{R}$**		$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	

Récapitulatif des trois cas de résolution.

III. SIGNE DU TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Étudier le signe d'un trinôme revient à connaître les intervalles sur lesquels il est positif, négatif, et les valeurs de x où il s'annule. On a, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

A. Cas n°1 : $\Delta < 0$

THÉORÈME

Si $\Delta < 0$, le trinôme est **du signe de** a.

› DÉMONSTRATION

$-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, donc $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \geq 0$. Le trinôme est du signe de a.

B. Cas n°2 : $\Delta = 0$

THÉORÈME

Si $\Delta = 0$, le trinôme est **du signe de** a et s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

› DÉMONSTRATION

$-\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$: le trinôme est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

C. Cas n°3 : $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 < x_2$ sont les racines. On se ramène à une équation produit (vue en seconde) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	**0**	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	**0**	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

REMARQUE

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est **du signe de** a à l'extérieur des racines, et **du signe opposé à** a à l'intérieur des racines.

EXEMPLE

Étudions le signe de $f(x) = -2x^2 + x + 4$. $\Delta = 33 > 0$, racines $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$f(x) = -2x^2 + x + 4$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

Du signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines.

Donc $f(x) \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\, \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{33}}{4}\,;\, +\infty\right[$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \in \left[\frac{1-\sqrt{33}}{4}\,;\, \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right]$.

IV. PROPRIÉTÉS SUPPLÉMENTAIRES

A. Somme et produit des racines

THÉORÈME

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, alors leur somme S et leur produit P vérifient :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c}{a}.$$

› DÉMONSTRATION

Cas de deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

PROPRIÉTÉ

Deux réels ont pour somme S et produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

› DÉMONSTRATION

i) Si x_1 et x_2 vérifient $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$, alors $x_2 = S - x_1$ et $P = x_1(S - x_1)$, donc $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$: x_1 est solution de $x^2 - Sx + P = 0$ (de même pour x_2).

ii) Réciproquement, si x_1, x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$.

EXEMPLE

L'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ admet $x_1 = 1$ comme solution évidente. L'autre solution vérifie $1 \times x_2 = -\frac{1}{2}$, d'où $x_2 = -\frac{1}{2}$.

B. Racines et symétrie de la courbe

PROPRIÉTÉ

Si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors l'abscisse du sommet vérifie : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.